1.28) $B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}}_{v_3} \right\}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Compruebo que B es base de $\mathbb{C}^3$ (Pongo vect. como filas y triangulo)

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix} F_2 \to F_1 - iF_2 \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 0 & 1+i & -i \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix} F_3 \to F_2 - F_3$$

$$\begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 0 & 1+i & -i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{SCD} \to \text{Sol. única} \to \text{LI}$$

Por lo tanto, efectivamente, es base ya que tiene la misma dimensión que la base canónica de $\mathbb{C}^3$ y es LI.

Quiero determinar $[v]_B$.

Planteo v como una cl de B.

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix}2i\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix}0\\1+i\\1-i\end{bmatrix}$$

Ecuaciones:

$$\begin{cases} 2i\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 & \text{I} \\ \alpha_1 - \alpha_2 + (1+i)\alpha_3 = 0 & \text{II} \\ \alpha_2 + (1-i)\alpha_3 = 1 & \text{III} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_1 - 2iF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2+2i & -2i-2i^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2+2i & 2-2i & 1 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right) (2+2i).F_3 - F_2$$

$$-2i-2i^2 = -2i+2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2+2i & 2-2i & 1 \\ 0 & 0 & 2+2i & 1+2i \end{array}\right)$$

$$(2+2i).(1-i) - (2-2i) = (2-2i+2i+2) - (2-2i) = 2+2i$$

Ecuaciones:

$$\begin{cases} (2i)\alpha_1 + (2)\alpha_2 = 1 & \text{IV} \\ (2+2i)\alpha_2 + (2-2i)\alpha_3 = 1 & \text{V} \\ (2+2i)\alpha_3 = 1+2i \to \alpha_3 = \frac{1+2i}{2+2i} \cdot \frac{(2-2i)}{(2-2i)} \to \alpha_3 = \frac{6+2i}{8} \to \boxed{\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i} & \text{VI} \end{cases}$$

VI em V $\to (2+2i)\alpha_2 + (2-2i)\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i\right) = 1 \to (2+2i)\alpha_2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right) = 1 \to$

$\to (2+2i)\alpha_2 = 1+i-2 \to \alpha_2 = \frac{-1+i}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i} \to \alpha_2 = \frac{4i}{8} \to \boxed{\alpha_2 = \frac{1}{2}i}$ VII

VII em IV $\rightarrow (2i)\alpha_1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}i\right) = 1 \rightarrow 2i\alpha_1 + i = 1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{1-i}{2i}\cdot\frac{-2i}{-2i} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha_1 = \frac{-2-2i}{4} \rightarrow \boxed{\alpha_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

Por lo tanto $\boxed{[v]_B = \left(\underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}_{\alpha_1},\ \underbrace{\frac{1}{2}i}_{\alpha_2},\ \underbrace{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i}_{\alpha_3}\right)}$